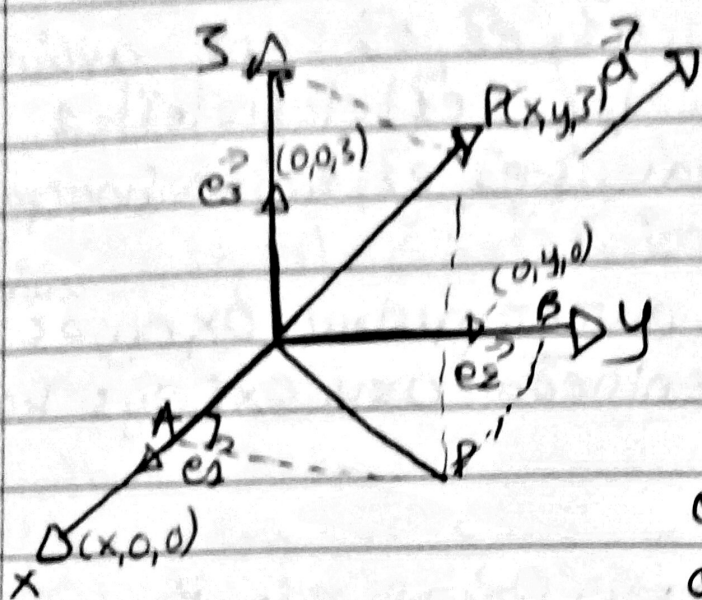


13/3/17

Την παρακάτω φορά είπαμε:
 $\dim D(\text{διδόταται}) = 3$



$ox \perp oy, oy \perp oz, ox \perp oz$
 $\{e_1, e_2, e_3\}$ βάση του D

Για κάθε διάνυσμα $\vec{a} \in D$
 υπάρχουν μοναδικός αριθμός
 $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\text{ώστε } \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Θεωρώ σημείο P ώστε $\vec{OP} = \vec{a}$

Φέρω ευθεία $PP' \perp oxy$.

Φέρω επίσης ευθεία $\Gamma P \parallel OP'$

όπου Γ το σημείο τομής

με τα OX, OY . Άρα $OP' \parallel O\Gamma$

$$\vec{OP} = \vec{OP'} + \vec{O\Gamma}$$

$$\vec{O\Gamma} = z\vec{e}_3$$

Φέρω ευθείες $P'A \parallel oy$ και $P'B \parallel ox$.

Το $OAP'B$ είναι παραλλ. Άρα

$$\vec{OP'} = \vec{OA} + \vec{OB} \quad \vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma}$$

$$\vec{OA} = x\vec{e}_1, \vec{OB} = y\vec{e}_2$$

$$\text{Συμπέρασμα: } \vec{a} = \vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

(Είχαμε πει ότι αν $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2 + z_1\vec{e}_3$

$$\vec{b} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + z_2\vec{e}_3$$

$$\text{Τότε } \left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{e}_1 + (y_1 + y_2)\vec{e}_2 + (z_1 + z_2)\vec{e}_3 \\ \lambda \vec{a} = (\lambda x_1)\vec{e}_1 + (\lambda y_1)\vec{e}_2 + (\lambda z_1)\vec{e}_3 \end{array} \right.$$

$$\text{Γράψαμε } \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x, y, z)$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^3, f(\vec{a}) = (x, y, z)$$

Η f είναι γραμμικός ισμορφισμός (1-1, και επί)

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0) \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0) \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

* Τα διάνυσμα $\vec{OP}$ καλείται διάνυσμα θέσης του P (ως προς το O).

$$P \rightarrow \vec{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = (x, y, z)$$

$P \rightarrow (x, y, z)$. Άρα ορίζεται μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του χώρου και του $\mathbb{R}^3$, δηλαδή μεταξύ σημείων και διατεταγμένων τριάδων.

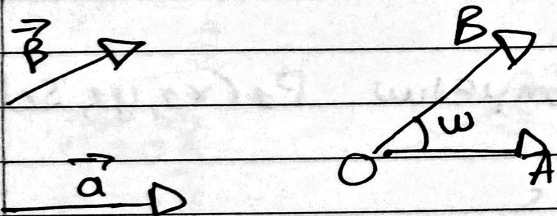
Οι αριθμοί (x, y, z) καλούνται συνεταγμένες του P .

x = τεταγμένη του P

y = τεταγμένη του P

z = κατηγμένη του P

Γωνία Διανυσμάτων:



Η γωνία $\omega = \angle AOB$ καλείται γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}$ και συμβολίζεται $\omega = (\vec{a}, \vec{b})$

Προσοχή ο ορισμός είναι καλός.

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$

Για να ορίσω γωνία πρέπει $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{b} \neq \vec{0}$

* Τα $\vec{a}, \vec{b}$ καλούνται ορθογώνια αν $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$.
 $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ είναι ορθοκανονική βάση, δηλ ορθογώνια μεταξύ τους ανά δύο και μήκους 1.

$$\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

$$\vec{a} = \vec{OP} = \vec{OP'} + \vec{P'P}$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{OP}|^2 = |\vec{OP'}|^2 + |\vec{P'P}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{OA}|^2 + |\vec{AP}|^2 = |\vec{OP}|^2$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{oA}|^2 + |\vec{oB}|^2 + |\vec{o\Gamma}|^2$$

$$\vec{oA} = x\vec{e_1}, \vec{oB} = y\vec{e_2}, \vec{o\Gamma} = z\vec{e_3}$$

$$|\vec{oA}| = |x|, |\vec{oB}| = |y|, |\vec{o\Gamma}| = |z|$$

$$|a|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Αποδείξαμε έτσι την πρόταση.

* Πρόταση: Αν $\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = (x, y, z)$
τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Απόσταση σημείων: Δίνονται τα σημεία

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$

δηλαδή το διάνυσμα θέσης του $\vec{OP_1} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + z_1\vec{e_3}$
και $\vec{OP_2} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + z_2\vec{e_3}$

Η απόσταση των P_1, P_2 είναι ο αριθμός

$$d(P_1, P_2) = |\vec{P_1P_2}|, \vec{P_1P_2} = \vec{OP_2} - \vec{OP_1}$$

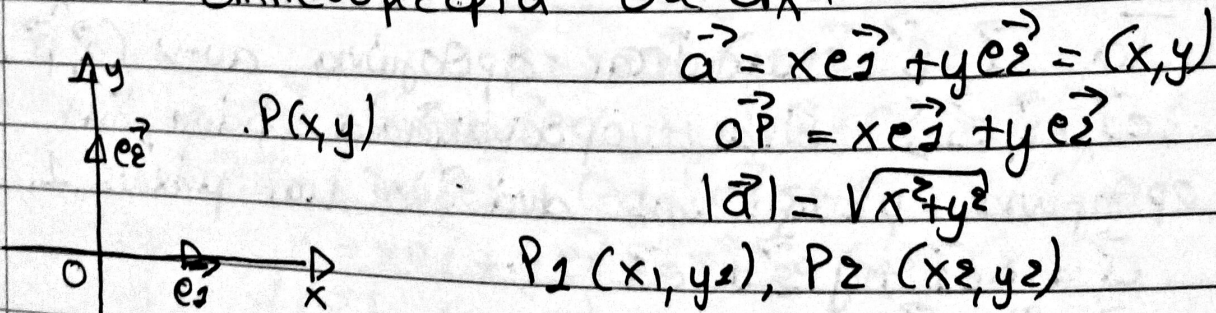
$$\vec{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\vec{e_1} + (y_2 - y_1)\vec{e_2} + (z_2 - z_1)\vec{e_3}$$

* Πρόταση: Η απόσταση των σημείων $P_1(x_1, y_1, z_1),$

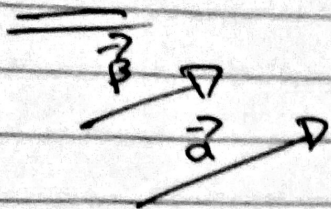
$P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι ο αριθμός

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Στην επιμετρομετρία θα είχα!

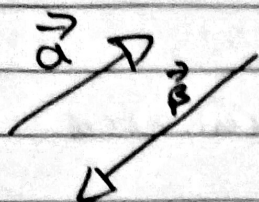


$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



$\vec{a}, \vec{b}$ ομόρροπα $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ γ. Ε

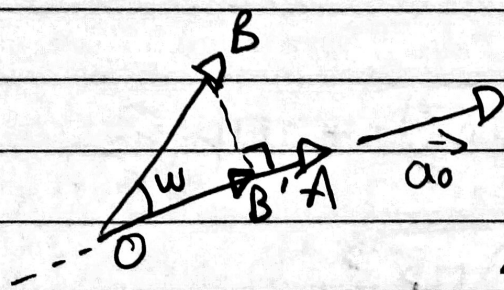
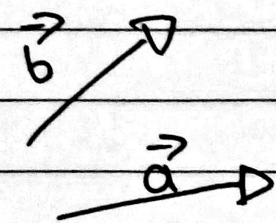
όταν γινώσκω
από 0 έως π



$\vec{a}, \vec{b}$ αντίρροπα $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi$

Ένα διάνυσμα καλείται μοναδιαίο αν έχει μήκος 1.
Θεωρού διάνυσμα $\vec{a} \neq \vec{0}$ $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$, $|\vec{a}_0| = 1$, $|\vec{a}| = 1$

Διανυσματική προβολή: $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$



$\vec{a} = \vec{OA}$
 $\vec{b} = \vec{OB}$

$\omega = (\vec{a}, \vec{b})$

Ορισμός: Το διάνυσμα $\vec{OB'}$ καλείται διανυσματική προβολή του $\vec{b}$ επί του $\vec{a}$

Συμβολισμός: $\text{πρ}_{\vec{a}} \vec{b} = \vec{OB'}$ = συγχρημα του $\vec{a}_0$
 $|\text{πρ}_{\vec{a}} \vec{b}| = |\vec{OB'}| = |\vec{OB}| \cos \omega = |\vec{b}| \cos \omega$

$\text{πρ}_{\vec{a}} \vec{b} = \lambda \vec{a}_0$, $|\lambda| = |\vec{b}| \cos \omega$

☞ ο λ είναι ή ορθή θετική ή αρνητική

* Πρόταση: $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta} = (|\vec{\beta}| \cos \omega) \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
 $\omega = (\vec{a}, \vec{\beta})$, $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \vec{a}_0$

* Η προβολή $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{a} = \vec{a}$

Ορισμός: Ο αριθμός $|\vec{\beta}| \cos \omega$ καλεῖται ^{πρω.}
 προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{a}$
 Συμβολισμός: $\text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta} = \vec{b}_{\vec{a}} = |\vec{\beta}| \cos \omega$

Πρόταση:

i) $\text{pr}_{\vec{a}} (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta} + \text{pr}_{\vec{a}} \vec{\gamma}$

ii) $\text{pr}_{\vec{a}} (\lambda \vec{\beta}) = \lambda \text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta}$

iii) $\overline{\text{pr}_{\vec{a}} (\vec{\beta} + \vec{\gamma})} = \overline{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta}} + \overline{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{\gamma}}$

iv) $\overline{\text{pr}_{\vec{a}} (\lambda \vec{\beta})} = \lambda \overline{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta}}$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Ορισμός: Καλούμε εσ. γινόμενο των

διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ του πραγματικού αριθμού

συμβολισμός

$$\rightarrow \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \\ |\vec{a}| \text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta} = |\vec{\beta}| \overline{\text{pr}_{\vec{a}} \vec{\beta}}, & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\beta} \neq \vec{0} \end{cases}$$

αδ. τμήτ. της.

ή ισότητα

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0} \\ |\vec{a}| |\vec{\beta}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{\beta}) & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{\beta} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Ορισμός: Ορθώνια διανύσματα. Τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ καλούνται ορθώνια αν-ν $\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = 0$

Παρατήρηση (1) Το $\vec{0}$ είναι ορθώνιο προς κάθε διάνυσμα.

(2) Έστω $\vec{a} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$. Τα $\vec{a}, \vec{\beta}$ είναι ορθώνια αν-ν $(\angle \vec{a}, \vec{\beta}) = \pi/2$.

Πρόταση: Ιδιότητες εσωτερικού γινομένου.

$$\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{εξ. γιν. } (\angle \vec{a}, \vec{\beta}) \leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle$$

$$1) \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2 \geq 0$$

$$\text{εξ. γιν. } \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$2) \langle \vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{a}_2, \vec{\beta} \rangle$$

$$\langle \lambda \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle$$

$$3) \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2 \rangle = \langle \vec{a}, \vec{\beta}_1 \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\beta}_2 \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \lambda \vec{\beta} \rangle = \lambda \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle$$

Απόδειξη

$$1) \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}|^2$$

Αν $\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0$ και $|\vec{a}| = 0$

$$\text{Αν } \vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cos(0) = |\vec{a}|^2$$

$$2) \langle a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \vec{\beta} \rangle = |\vec{\beta}| \text{πρ}_{\vec{\beta}}(a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2)$$

$$= |\vec{\beta}| (\text{πρ}_{\vec{\beta}} a_1 \vec{e}_1 + \text{πρ}_{\vec{\beta}} a_2 \vec{e}_2) = |\vec{\beta}| \text{πρ}_{\vec{\beta}} a_1 \vec{e}_1 + |\vec{\beta}| \text{πρ}_{\vec{\beta}} a_2 \vec{e}_2 \\ = \langle a_1 \vec{e}_1, \vec{\beta} \rangle + \langle a_2 \vec{e}_2, \vec{\beta} \rangle$$

Πρόταση (Υποδοχή των Εσωτερικών γινομένων)
Έστω $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$ ορθοκανονική βάση
Αν $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = (a_1, a_2, a_3)$
 $\vec{\beta} = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

τότε

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3$$

Απόδειξη: $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_3, \vec{e}_3 \rangle = 1$
 $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0$

$$\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = \langle a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 \rangle \\ = \langle a_1 \vec{e}_1, \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 \rangle + \\ + \langle a_2 \vec{e}_2, \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 \rangle + \\ + \langle a_3 \vec{e}_3, \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \beta_3 \vec{e}_3 \rangle \\ = a_1 (\beta_1 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + \beta_2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + \beta_3 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle) +$$

Υπολογισμός γωνίας διανυσμάτων

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 \neq \vec{0}$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \neq \vec{0}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Πρόταση: (Πρόσθετες ιδιότητες του εσ. γινόμενου)

1) $|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$ ανισότητα Cauchy-Schwarz
Η ανισότητα Cauchy-Schwarz ισχύει αν-ν
τα διανύσματα είναι συγγραμμικά.

$$2) |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

$$3) |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (\text{τριγ. ανισότητα ή ανισότητα Minkowsky}).$$

$$4) \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

Απόδειξη:

$$1) \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{αν } \vec{a} = \vec{0} \text{ ή } \vec{b} = \vec{0} \\ |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}), & \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ και } \vec{b} \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$|\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle| = \begin{cases} 0 \\ |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos(\vec{a}, \vec{b})| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2) |\vec{a} + \vec{\beta}|^2 &= \langle \vec{a} + \vec{\beta}, \vec{a} + \vec{\beta} \rangle = \\ &= \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\beta} \rangle \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \end{aligned}$$

3) Από τον Mink...

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{\beta}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \leq |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{\beta}| \\ &\leq |\vec{a}|^2 + |\vec{\beta}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{\beta}| \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{\beta}|)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αν } |\vec{a} + \vec{\beta}| &= |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Rightarrow \\ |\vec{a} + \vec{\beta}|^2 &= (|\vec{a}| + |\vec{\beta}|)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = |\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle| \geq 0 \Rightarrow \sigma\omega(\vec{a}, \vec{\beta}) \geq 0 \\ \text{και} \\ |\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle| = |\vec{a}||\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{a}, \vec{\beta} \text{ συγγραμμικά} \\ \Rightarrow (\vec{a}, \vec{\beta}) = 0 \text{ ή } \pi. \end{array} \right.$$

Η ιδιότητα του Mink... ισχύει

αν τα διανύσματα είναι ομόρροπα

Παρατήρηση: Δίνεται $\vec{a}, \vec{\beta}$ ορθόγωνα και $|\vec{a}| = 1$

$$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) = 0 \Rightarrow$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow$$

$$|\vec{a}|^2 \cdot \vec{\beta} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\beta} = 0}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = 0$$

Λάθος δεύτερο

Γιατί είναι

λάθος γιατί

δεν ισχύει η

επιμεριστική,

προσεχ ιδιότητα

γιαυτό το πρώτο

$$\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle = 0$$